УДК 519.2

В.А. ВОЛОШКО, член-корреспондент Ю.С. ХАРИН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОЦЕНОК КЕПСТРАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ГАУССОВСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

НИИ прикладных проблем математики и информатики БГУ, Минск *Поступило*

Введение. Предложенный Джоном Тьюки кепстральный анализ [1,2] – это метод нелинейного анализа случайных процессов, широко применяемый в задачах распознавания речи, сейсмологии, обработки сигналов, робастного прогнозирования временных рядов [3,4]. Он основан на преобразовании Фурье логарифма спектральной плотности наблюдаемого временного ряда. Для широкого класса временных рядов оценки кепстральных коэффициентов позволяют "компактно" представлять результаты наблюдений [5], и делать качественные выводы об их вероятностных свойствах.

В литературе доказаны основные свойства отсчетов периодограммы [6], такие как асимптотическая некоррелированность для стационарных в широком смысле временных рядов, асимптотическая независимость и χ_2^2-распределенность для временных рядов, стационарных в узком смысле [6,7] (при растущей длительности наблюдения $T \to \infty$). Также установлены некоторые свойства оценок кепстральных коэффициентов при определенных условиях регулярности, например их асимптотическая некоррелированность и равнодисперсность [8].

В данной статье исследуются моменты статистических оценок кепстральных коэффициентов гауссовского временного ряда при выполнении условия регулярности на спектральную плотность. Построено асимптотическое разложение математического ожидания оценок кепстральных коэффициентов до членов порядка $O\left(T^{-2}\right)$, выделен главный член асимптотического разложения смешанного момента n-го порядка центрированных оценок кепстральных коэффициентов. Для моментов второго порядка найдены два главных члена разложения.

Математическая модель и постановка задачи. Пусть $\{x_t\}, t \in \mathbb{Z},$ – гауссовский стационарный временной ряд с нулевым математическим ожиданием $E\{x_t\} = 0,$ спектральной плотностью (сокращенно, спектром) $S(\lambda)$ и лог-спектром $L(\lambda) = \ln S(\lambda)$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, P):

$$S(\lambda) = S(-\lambda) = \sum_{\tau\in\mathbb{Z}} \sigma_\tau \cos(\tau\lambda), \quad L(\lambda) = L(-\lambda) = \sum_{\tau\in\mathbb{Z}} l_\tau \cos(\tau\lambda), \quad \lambda \in \Pi = [-\pi, \pi],$$
$$\sigma_\tau = \sigma_{-\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\lambda)\cos(\tau\lambda)d\lambda, \quad l_\tau = l_{-\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L(\lambda)\cos(\tau\lambda)d\lambda, \quad \tau \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где коэффициенты ряда Фурье для $S(\lambda)$ – ковариации $\{\sigma_\tau\}$, а для $L(\lambda)$ – так называемые (в теории обработки сигналов) кепстральные коэффициенты [8,10]. Введем условие регулярности, характеризующее асимптотику l_τ при $\tau \to \infty$:

$$\chi = \overline{\lim_{\tau\to+\infty}} \sqrt[\tau]{|\, l_\tau\,|} < 1. \tag{2}$$

При выполнении условия (2) ряды Лорана $\sum_{\tau\in\mathbb{Z}} \sigma_\tau z^\tau$ и $\sum_{\tau\in\mathbb{Z}} l_\tau z^\tau$ сходятся в кольце $\chi < |\, z\,| < 1/\chi$, а $L(\lambda)$ – бесконечно дифференцируемая и ограниченная функция. В частности, условию (2) удовлетворяют все временные ряды авторегрессии и скользящего среднего конечного порядка без нулей и полюсов в спектре [6].

Построим дискретное преобразование Фурье (ДПФ) временного ряда $x_1,\ldots,x_T$ длины $T\in\mathbb{N}$:

$$y_\lambda = u_\lambda + iv_\lambda = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} x_t e^{i(t-t_0)\lambda},\quad \beta_\lambda = \ln|y_\lambda|^2,\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

где i – мнимая единица, $t_0=(T+1)/2$ – среднее значение индексов времени наблюдения $1,2,\ldots,T$, которое введено в (3) для упрощения дальнейших математических выкладок. Согласно [6], статистика $|y_\lambda|^2$, определяемая (3), называется периодограммой, а β_λ – лог-периодограммой [9]. Построим подстановочные ("plug-in") статистические оценки для кепстральных коэффициентов $\{l_\tau\}$:

$$\hat{l}_\tau = \frac{1}{T}\sum_{\lambda=1}^{T}\beta_{\tilde\lambda}\cos\left(\tau\tilde\lambda\right),\quad \tilde\lambda=\frac{2\pi\lambda}{T},\quad \tau\in\Lambda, \tag{4}$$

где $\Lambda=\left\{0,1,\ldots,\left\lfloor\frac{T}{2}\right\rfloor\right\}$, $\lfloor z\rfloor,\lceil z\rceil$ – ближайшие к $z\in\mathbb{R}$ целые снизу и сверху соответственно.

Цель данной статьи – построение асимптотических разложений для моментов статистик $\{\hat{l}_\lambda\}$ в асимптотике растущей длительности наблюдения временного ряда $T\to\infty$.

Моменты ДПФ $\{y_\lambda\}$. Нам понадобится ряд вспомогательных результатов для ДПФ $\{y_\lambda\}$. Введем комплекснозначные функции:

$$Q(\lambda)=\sum_{\tau\in\mathbb{Z}}\sigma_\tau e^{i|\tau|\lambda}=S(\lambda)+iH(\lambda),\quad Q_T(\lambda)=\sum_{\tau=1-T}^{T-1}\sigma_\tau e^{i|\tau|\lambda}=S_T(\lambda)+iH_T(\lambda). \tag{5}$$

Теорема 1. *Если имеет место математическая модель (1),(3), то для ковариаций* $e_{\nu,\mu}=E\{y_\nu y_\mu\}$, $A_{\nu,\mu}=E\{u_\nu u_\mu\}$, $B_{\nu,\mu}=E\{v_\nu v_\mu\}$ *справедливы следующие выражения:*

$$\begin{gathered}e_{\nu,\mu}=\frac{\operatorname{Im}\left(e^{i\lambda T}\overline{q}_T\right)}{T\sin\lambda}=\frac{\operatorname{Im}\left(e^{i\lambda T}\overline{q}\right)}{T\sin\lambda}+\Delta_{\nu,\mu},\quad \left|\Delta_{\nu,\mu}\right|\le\sum\nolimits_{\tau>T}|\sigma_\tau|\left(\frac{\tau}{T}-1\right),\\ A_{\nu,\mu}=\frac{e_{-\nu,\mu}+e_{\nu,\mu}}{2},\quad B_{\nu,\mu}=\frac{e_{-\nu,\mu}-e_{\nu,\mu}}{2},\quad E\{u_\nu v_\mu\}=0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $q=\dfrac{Q(\nu)+Q(\mu)}{2}$, $q_T=\dfrac{Q_T(\nu)+Q_T(\mu)}{2}$, $\lambda=\dfrac{\nu+\mu}{2}$; *черта означает комплексное сопряжение.*

Доказательство основано на прямом вычислении ковариаций с учетом (1),(3).

Из Теоремы 1 следует, что процессы $\{u_\lambda\}$ и $\{v_\lambda\}$ некоррелированы, а в силу гауссовости (вытекающей из гауссовости x_t и линейности преобразования (3)), и независимы. Обозначим: $1\{A\}$ – индикатор события A; $\Lambda_0=\{0\}$ для нечетных T, и $\Lambda_0=\{0,T/2\}$ для четных T;

$$a_{\nu,\mu}=\frac{A_{\nu,\mu}}{\sqrt{A_{\nu,\nu}A_{\mu,\mu}}},\quad b_{\nu,\mu}=\frac{B_{\nu,\mu}}{\sqrt{B_{\nu,\nu}B_{\mu,\mu}}}\ - \tag{7}$$

корреляционные функции для процессов $\{u_\lambda\}$ и $\{v_\lambda\}$,

$$B_{\lambda,\lambda}=\rho_\lambda\left(1+\omega_\lambda\right),\quad A_{\lambda,\lambda}=\rho_\lambda\left(1-\omega_\lambda\right),\quad \sqrt{B_{\lambda,\lambda}}=\vartheta_\lambda\left(1+\theta_\lambda\right),\quad \sqrt{A_{\lambda,\lambda}}=\vartheta_\lambda\left(1-\theta_\lambda\right). \tag{8}$$

Из (6),(8) имеем соотношения:

$$\rho_\lambda=\frac{e_{-\lambda,\lambda}}{2},\quad \omega_\lambda=-\frac{e_{\lambda,\lambda}}{e_{-\lambda,\lambda}}=\frac{2\theta_\lambda}{1+\theta_\lambda^2},\quad \theta_\lambda=\frac{\omega_\lambda}{1+\sqrt{1-\omega_\lambda^2}},\quad \vartheta_\lambda=\sqrt{\frac{\rho_\lambda}{1+\theta_\lambda^2}}. \tag{9}$$

На основе (5) построим функции:

$$\Psi(\nu,\mu)=\frac{H(\nu)+H(\mu)}{2\sin\frac{\nu+\mu}{2}},\quad \Psi_T(\nu,\mu)=\frac{H_T(\nu)+H_T(\mu)}{2\sin\frac{\nu+\mu}{2}}. \tag{10}$$

Следствие 1. *В условиях Теоремы 1 для* $\nu,\mu\in\mathbb{Z}$

$$e_{\tilde\nu,\tilde\mu}=\varepsilon_{\nu+\mu}S_T\left(\tilde\mu\right)-\frac{\Psi_T(\tilde\nu,\tilde\mu)}{T}(-1)^{\nu+\mu}=\varepsilon_{\nu+\mu}S\left(\tilde\mu\right)-\frac{\Psi(\tilde\nu,\tilde\mu)}{T}(-1)^{\nu+\mu}+\Delta_{\tilde\nu,\tilde\mu}, \tag{11}$$

где $\tilde\lambda$ *определяется (4) и* $\varepsilon_n=1\left\{\frac{n}{T}\in\mathbb{Z}\right\}(-1)^{\frac{n(T+1)}{T}}$. *Кроме того, если выполнено условие регулярности (2), то равномерно по* $\nu,\mu\in\Lambda,\nu\neq\mu$, *справедливы следующие асимптотические разложения при* $T\to\infty$:

$$e_{-\tilde\mu,\tilde\mu}=\left(S-\frac{H'}{T}\right)(\tilde\mu)+O\left(\chi_+^T\right),\quad \omega_{\tilde\mu}=\begin{cases}T^{-1}\left(H/S\sin\right)(\tilde\mu)+O\left(T^{-2}\right),\mu\notin\Lambda_0,\\ (-1)^{1+2\mu/T},\mu\in\Lambda_0,\end{cases} \tag{12}$$

$$a_{\tilde\nu,\tilde\mu},b_{\tilde\nu,\tilde\mu}=(-1)^{\nu+\mu+1}\frac{\Psi(\tilde\nu,-\tilde\mu)\pm\Psi(\tilde\nu,\tilde\mu)}{T\sqrt{2^\varepsilon S(\tilde\nu)S(\tilde\mu)}}+O\left(\frac{1}{T^2}\right), \tag{13}$$

где $\varepsilon=\varepsilon_{2\nu}^2+\varepsilon_{2\mu}^2$, $\chi<\chi_+<1$.

Доказательство использует Теорему 1 и быструю сходимость (5) при условии (2).

Моменты вспомогательных случайных величин. Будем обозначать точкой сверху центрирование случайной величины: $\dot X=X-E\left\{X\right\}$.

Лемма 1. *Если случайная величина* ζ *имеет гамма-распределение с плотностью* $p(x)=x^{s-1}e^{-x}/\Gamma(s)$, $x,s>0$, *и* $\eta=\ln\zeta$, *то для* $x>-s,n=0,1,\ldots$:

$$E\left\{\eta\right\}=\psi(s),\quad E\left\{\dot\eta^n\zeta^x\right\}=\frac{\Gamma(s+x)}{\Gamma(s)}\binom{n}{x}_s,\quad \binom{0}{x}_s=1,\quad \binom{n+1}{x}_s=\left(\frac{d}{dx}+\psi\Big|_s^{s+x}\right)\binom{n}{x}_s, \tag{14}$$

где $\psi(s)=\Gamma'(s)/\Gamma(s)$ *– дигамма-функция [11].*

Доказательство основано на свойствах гамма-функции $\Gamma(x)$ [11].

Обозначим $\kappa(x)=\psi\Big|_s^{s+x}$. Из (14) имеем

$$\binom{1}{x}_s=\kappa,\quad \binom{2}{x}_s=\kappa'+\kappa^2,\quad \binom{3}{x}_s=\kappa''+3\kappa\kappa'+\kappa^3, \tag{15}$$

откуда, используя свойство $\psi\Big|_s^{s+1}=s^{-1}$ [11], получаем

$$\binom{1}{1}_s=\kappa(1)=s^{-1},\quad \binom{2}{0}_s=\kappa'(0)=\psi'(s),\quad \binom{3}{0}_s=\kappa''(0)=\psi''(s). \tag{16}$$

Согласно [11] $\psi'(s)=\sum_{n\geq0}(s+n)^{-2}$. Тогда $\psi'(1)=\sum_{n>0}n^{-2}=\pi^2/6$ и $\psi''(1)=-2\sum_{n>0}n^{-3}=-2A$, где $A\approx1.202$ – постоянная Апери [11].

Для $x\in\mathbb{R},|x|\leq1,\, z\in\mathbb{C},|x|\leq|z|\leq|1/x|$ введем функцию:

$$\phi_x(z)=\ln\left(1-xz\right)+\ln\left(1-x/z\right),\quad \left(\phi_x(z)\right)^p=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\{{p \atop n}\right\}_x z^n, \tag{17}$$

где $\left\{{p \atop n}\right\}_x$ – коэффициент при z^n ряда Лорана для p-й степени функции $\phi_x(z)$. Выделим некоторые свойства этих коэффициентов:

$$\left\{{0 \atop n}\right\}_x \equiv \delta_{n,0}, \quad \left\{{p \atop n}\right\}_x = \left\{{p \atop -n}\right\}_x \underset{x\to 0}{=} O\left(x^p\right), \quad \left\{{1 \atop n}\right\}_x = \begin{cases} -x^n/n, \, n>0, \\ 0, \, n=0, \end{cases} \quad \left\{{2 \atop 0}\right\}_x = 2\,\mathrm{Li}_2\left(x^2\right), \tag{18}$$

где $\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{n>0} x^n/n^2$ – дилогарифм [11].

Теорема 2. *Пусть* $z=\sqrt{r}e^{i\varphi}$, r *и* φ *– независимые случайные величины,* r *распределена экспоненциально с плотностью* $p(r)=e^{-r}$, φ *– равномерно на* Π, $y=c_+z+c_-\overline{z}$, $c_\pm \in \mathbb{R}$, $0<|c_+|\geq|c_-|$, $\beta=\ln|y|^2$, $k^\pm, p\in\{0,1,\ldots\}$. *Тогда*

$$E\{\beta\}=\ln c_+^2-\gamma, \quad E\left\{z^{k^+}\overline{z}^{k^-}\dot{\beta}^p\right\}=1\{k\in\mathbb{Z}\}\,k!\sum_{n=0}^{p}C_p^n\left({p-n \atop k}\right)_1\left\{{n \atop \delta}\right\}_\theta, \tag{19}$$

где $\theta=-c_-/c_+$, $k=\left(k^++k^-\right)/2$, $\delta=\left(k^+-k^-\right)/2$, $\gamma\approx 0.577$ *– постоянная Эйлера [11].*

Доказательство следует из Леммы 1.

Следствие 2. *Для* $\xi\sim N_2\left(0,I_2\right)$, $a,b\geq 0$, $a+b>0$, *и* $\beta=\ln\left(a^2\xi_1^2+b^2\xi_2^2\right)$ *верно:*

$$E\{\beta\}=\ln 2\vartheta^2-\gamma, \quad E\left\{\dot{\beta}^p\right\}=\sum_{n=0}^{p}C_p^n\left({p-n \atop 0}\right)_1\left\{{n \atop 0}\right\}_\theta, \quad E\left\{\xi_1\xi_j\dot{\beta}\right\}=\delta_{1,j}\left(1-\theta\right), \tag{20}$$

где $\vartheta=(a+b)/2$, $p=0,1,\ldots$, $\theta=(b-a)/(b+a)$.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой в (19).

В частности, с учетом (16) и (18) имеем для $p=0,1,\ldots$:

$$E\left\{\dot{\beta}^p\right\}=\left({p \atop 0}\right)_1+O\left(\theta^2\right), \quad E\left\{\dot{\beta}^2\right\}=\frac{\pi^2}{6}+2\,\mathrm{Li}_2\left(\theta^2\right), \quad \left({3 \atop 0}\right)_1=-2A. \tag{21}$$

Заметим также, что при $a=\sqrt{A_{\lambda,\lambda}}, b=\sqrt{B_{\lambda,\lambda}}$ в (20) $\theta=\theta_\lambda$ и $\vartheta=\vartheta_\lambda$.

Моменты лог-периодограммы $\{\beta_\lambda\}$.

Теорема 3. *Пусть* $k>1$ *– натуральное число,* $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$, $n_1,\ldots,n_k\in\{0,1,\ldots\}$, $k_1=\sum_{j=1}^k 1\{n_j=1\}$ *и* ε *– норма вектора, составленного из* $a_{\lambda_r,\lambda_q}, b_{\lambda_r,\lambda_q}$ *для* $r,q=1,\ldots,k$, $r<q$. *Тогда справедливы следующие асимптотические соотношения при* $\varepsilon\to 0$ *(*$\lambda_1=\nu, \lambda_2=\mu$*):*

$$E\left\{\prod_{j=1}^{k}\dot{\beta}_{\lambda_j}^{n_j}\right\}=\prod_{j=1}^{k}E\left\{\dot{\beta}_{\lambda_j}^{n_j}\right\}+O\left(\varepsilon^{\max\{2,k_1\}}\right), \tag{23}$$

$$E\left\{\dot{\beta}_\nu\dot{\beta}_\mu\right\}=\frac{a_{\nu,\mu}^2\left(1-\theta_\nu\right)\left(1-\theta_\mu\right)+b_{\nu,\mu}^2\left(1+\theta_\nu\right)\left(1+\theta_\mu\right)}{2}+O\left(\varepsilon^3\right). \tag{24}$$

Доказательство использует разложение экспоненты в формуле плотности нормального закона в ряд и формулы (20).

В вырожденном случае, когда $\theta_\nu=\theta_\mu=-1$, правая часть (24) может быть вычислена точно. В этом случае β_ν и β_μ – логарифмы квадратов нормальных $a_{\nu,\mu}$-коррелированных случайных величин: $u_\nu=\sqrt{2rA_{\nu,\nu}}\sin\varphi$, $u_\mu=\sqrt{2rA_{\mu,\mu}}\sin\left(\varphi+\Delta\right)$, где r,φ определены в Теореме 2, $\cos\Delta=a_{\nu,\mu}$, $q=\ln r$,

$$\dot\beta_\nu = \dot q + \ln\left(4\sin^2\varphi\right) = \dot q - 2\sum_{n>0}\frac{\cos(2n\varphi)}{n}, \quad \dot\beta_\mu = \dot q - 2\sum_{n>0}\frac{\cos\left(2n(\varphi+\Delta)\right)}{n},$$

$$E\left\{\dot\beta_\nu\dot\beta_\mu\right\} = E\left\{\dot q^2\right\} + 2\sum_{n>0}\frac{\cos(2n\Delta)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(z^{-1}\right), \quad z = e^{2\Delta i}.$$

Из [11] при $0 \le \Delta \le \pi$ имеем:

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(z^{-1}\right) = \frac{\pi^2}{3} + \pi i \ln z - \frac{1}{2}\ln^2 z = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}(\ln z - \pi i)^2 = -\frac{\pi^2}{6} + 2\left(\Delta - \frac{\pi}{2}\right)^2,$$

откуда $E\left\{\dot\beta_\nu\dot\beta_\mu\right\} = 2(\Delta-\pi/2)^2 = 2\arcsin^2 a_{\nu,\mu}$. Применяя теперь формулу Тейлора, получаем $2\arcsin^2 a_{\nu,\mu} = 2a^2_{\nu,\mu} + O\left(\varepsilon^3\right)$, $\varepsilon = \left|a_{\nu,\mu}\right| \to 0$, что совпадает с (24).

Следствие 3. *Если выполнено условие регулярности (2), то для каждого $k>1$ и набора степеней $n_1,\ldots,n_k \in \{0,1,\ldots\}$, $k_1 = \sum_{j=1}^k \delta_{1,n_j}$, следующие асимптотические соотношения выполняются при $T\to+\infty$ равномерно по всем наборам попарно различных $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \Lambda$ ($\lambda_1 = \nu, \lambda_2 = \mu$):*

$$\varepsilon = O\left(\frac{1}{T}\right), \quad E\left\{\prod_{j=1}^k \dot\beta^{n_j}_{\tilde\lambda_j}\right\} = \prod_{j=1}^k E\left\{\dot\beta^{n_j}_{\tilde\lambda_j}\right\} + O\left(\frac{1}{T^{\max\{2,k_1\}}}\right), \tag{25}$$

$$E\left\{\dot\beta_{\tilde\nu}\dot\beta_{\tilde\mu}\right\} = \frac{\Psi^2(\tilde\nu,-\tilde\mu) + \Psi^2(\tilde\nu,\tilde\mu)}{T^2 S(\tilde\nu)S(\tilde\mu)} + O\left(\frac{1}{T^3}\right), \tag{26}$$

где ε из Теоремы 3 вычисляются для значений $\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_k$.

Доказательство основано на Теореме 3 и Следствии 1.

Моменты оценок кепстральных коэффициентов $\left\{\hat l_\tau\right\}$. Обозначим: $1\{m\,|\,n\}$ – индикатор делимости n на m; $\overline{1}\{m\,|\,n\} = 1 - 1\{m\,|\,n\}$; $g_n = 1 + 1\{2\,|\,T\}(-1)^n$;

$$c_\tau = \int_{\Pi^n}\frac{c(\lambda)}{(2\pi)^n}\prod_{j=1}^n\cos\left(\tau_j\lambda_j\right)d\lambda, \quad c:\Pi^n\to\mathbb{R}, \quad \tau\in\mathbb{Z}^n, \; - \tag{27}$$

многомерный косинус-коэффициент функции $c(\lambda)$.

Заметим, что если $c(z) = \sum_{\tau\in\mathbb{Z}} c_\tau z^\tau$ сходится в кольце $\chi < |z| < 1/\chi$, то:

$$\sum_{\lambda=1}^T c\left(e^{i\tilde\lambda}\right)e^{i\tau\tilde\lambda} = T\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-\tau+nT} = T\left(c_{-\tau_0} + O\left(\chi_+^{T/2}\right)\right), \quad \chi < \chi_+ < 1, \tag{28}$$

где τ_0 имеет наименьшее абсолютное значение среди $\{\tau - nT : n\in\mathbb{Z}\}$. Аналогичный результат верен и для рядов от нескольких переменных, сходящихся в декартовом произведении колец [12].

Обозначим: N – разбиение множества индексов $\{1,\ldots,n\}$ на k непустых подмножеств $N_1,\ldots,N_k$, $N_j = \left\{N(j,1),\ldots,N\left(j,n_j\right)\right\}$ – подмножество мощности n_j $\left(n_1+\ldots+n_k = n\right)$, $k_1 = \sum_{j=1}^k 1\left\{n_j = 1\right\}$.

Теорема 4. *Если выполнено условие регулярности (2), то для моментов статистических оценок кепстральных коэффициентов (4) равномерно по* $\tau,\tau',\tau_j \in \Lambda$ *справедливы следующие асимптотические разложения при* $T \to +\infty$:

$$E\left\{\widehat{l}_\tau\right\} = l_\tau - \gamma \cdot 1\{\tau = 0\} - \frac{1}{T}\left(\frac{H'}{S}\right)_\tau - \frac{1}{2T^2}\left(\frac{\left(H'\right)^2 + \frac{H^2}{2\sin^2}}{S^2}\right)_\tau - \frac{g_\tau}{T}\ln 2 + O\left(\frac{1}{T^3}\right), \qquad (29)$$

$$E\left\{\prod_{j=1}^{n}\dot{\widehat{l}}_{\tau_j}\right\} = \frac{1}{T^{\lceil n/2\rceil}}\left(O\left(\frac{1}{T}\right) + F_n \sum_{N:k=\lfloor n/2\rfloor}^{k_1=0}\prod_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor} R\left(\tau_{N(j,1),\ldots,N(j,n_j)}\right)\right), \quad n > 1, \qquad (30)$$

$$E\left\{\dot{\widehat{l}}_\tau \dot{\widehat{l}}_{\tau'}\right\} = \frac{\pi^2}{6T}\left(R(\tau,\tau') + \frac{g_{\tau+\tau'}}{T}\right) + \frac{2}{T^2}\left(\frac{\Psi^2(\nu,\mu)}{S(\nu)S(\mu)}\right)_{\tau,\tau'} + O\left(\frac{1}{T^3}\right), \qquad (31)$$

где $R(\tau_1,\ldots,\tau_r) = \sum\limits_{\tau=\tau_1\pm\ldots\pm\tau_r} 1\{T \mid \tau\}$, $F_n = (-2A)^p\left(\pi^2/6\right)^q$, $p = \overline{1}\{2 \mid n\}$, $q = (n-3p)/2$.

Доказательство использует Следствие 3, многомерный вариант формулы (28), а также некоторые комбинаторные выкладки.

Учитывая главный член смещения в (29) для $\tau = 0$, мы можем использовать статистику $\widehat{l}_0 + \gamma$ для оценивания коэффициента l_0, который называется энтропией [13]. С такой поправкой оценки (4) при условии регулярности (2) в асимптотике растущей длительности наблюдения $T \to \infty$ из (29) асимптотически не смещены и, как следует из (30), сходятся в среднеквадратичном к кепстральным коэффициентам, что влечет их состоятельность. Также отметим следующее свойство робастности: главный член смешанного центрального момента оценок (30) не зависит от спектральной плотности временного ряда, а зависит только от набора индексов. Кроме того, для четных порядков n этот главный член согласно (30) вычисляется так же, как и совместный момент n гауссовских в совокупности случайных величин: по всем разбиениям n индексов на пары суммируются произведения $n/2$ моментов второго порядка. Поэтому главные члены разложения моментов четного порядка в (30) в точности равны соответствующим моментам независимых гауссовских случайных величин $\xi_{i:i\in\Lambda}$ с дисперсиями $D\{\xi_i\} = 2^{1\{i\in\Lambda_0\}}\pi^2/6T$. Асимметрия распределения оценок (4) проявляется в ненулевых главных членах моментов нечетного порядка, где возникает постоянная Апери.

Заключение. В статье в асимптотике растущей длительности наблюдения гауссовского стационарного временного ряда построены асимптотические разложения смешанных центральных моментов лог-периодограммы и оценок кепстральных коэффициентов при условии регулярности (2). Заметим, что существенную роль в формулах для этих моментов играет функция $H(\lambda) = \sum\limits_{\tau\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign}(\tau)\sigma_\tau \sin(\tau\lambda)$, которую можно назвать псевдоспектром. Также выделим выявленное в (30) свойство робастности главного члена асимптотического разложения смешанного центрального момента n-го порядка оценок кепстральных коэффициентов к изменению исходной модели в рамках условия (2). Частный случай этого свойства при $n = 2$ широко известен [8].

Литература

1. Noll A.M. // J. American Statist. Assoc. 1967. V.41, No 2. P. 293-309.
2. Oppenheim A.V., Shafer R.W. Discrete-time Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
3. Харин Ю.С. Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании. Минск: БГУ, 2008.
4. Kharin Yu.S., Voloshko V.A. // J. Statist. Plann. Inference. 2011. V. 141, I. 9. P. 3276-3288.
5. Voloshko V.A., Kharin Yu.S. // Proceedings of the [9th] conference CDAM. 2010. V. 1. P. 268-271.
6. Андерсон Т.В. Статистический анализ временных рядов. М, 1976.
7. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М: Мир, 1980.
8. Merhav N. // IEEE Transactions On Signal Processing. 1993. V. 41, No. 5. P. 1990-1993.
9. Arteche J., Orbe J. // J. Time Series Analysis. 2009. V. 6. P. 591-617.
10. Bloomfield P. // Biometrika. 1973. V. 60. P. 217-226.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции – том 1. М, 1973.
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М: Наука, 1987.
13. Amari S. Methods of Information Geometry. Oxford University Press, 2000.

УДК 519.2

Волошко В.А., Харин Ю.С. **Об асимптотических свойствах оценок кепстральных коэффициентов для гауссовского временного ряда** // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № . С.

В асимптотике растущей длительности наблюдения получено разложение смещения подстановочных оценок кепстральных коэффициентов для гауссовского стационарного временного ряда с условием регулярности. Найден главный член разложения смешанного центрального момента произвольного порядка оценок кепстральных коэффициентов. Для момента второго порядка найдены два главных члена разложения. Выделено свойство инвариантности главного члена разложений исследуемых моментов к спектральной плотности временного ряда.

Библиогр. – 13 назв.

VOLOSHKO V.A., KHARIN YU.S.

valeravoloshko@yandex.ru; kharin@bsu.by

ON ASYMPTOTIC PROPERTIES

OF CEPSTRUM ESTIMATORS FOR THE GAUSSIAN TIME SERIES

Summary

Cepstrum estimators are considered for the Gaussian time series under a regularity condition. Mixed moments of cepstrum estimators are analyzed. Main terms of asymptotic expansions of mixed moments are built under increasing observation time.

Волошко Валерий Анатольевич – аспирант Факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, раб. тел. 209-55-49, моб. тел. +375-29-144-36-90, email: valeravoloshko@yandex.ru.

Харин Юрий Семенович – директор НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, раб. тел. 209-51-04, моб. тел. +375-29-621-82-36, email: kharin@bsu.by.