

## 59 Размножение вирусов

**Задача.** Компьютер Боба заражен вирусом, который непрерывно размножается. Одну миллисекунду вновь рожденный вирус обживается, а затем каждую следующую миллисекунду производит новую копию самого себя. Все началось с одной единственной копии. Боб обратился за помощью к Тренту, и тот нашел ошибку в программе вируса. Оказывается, что, как только количество копий станет кратно  $2^{32}$ , все они будут мгновенно уничтожены, и компьютер будет спасен. Стоит ли Бобу надеяться на спасение? Если да, то как долго придется ждать?

**Решение.** Докажем, что компьютер будет спасен не только для  $m = 2^{32}$ , но и для любого другого натурального  $m > 1$ . Пусть  $s_t$  — число копий вируса на  $t$ -й миллисекунде. Тогда  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 1$ ,  $s_3 = s_1 + s_2$  и, вообще,

$$s_{t+2} = s_t + s_{t+1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Таким образом,  $(s_t)$  — это последовательность Фибоначчи. Ее первые элементы:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Последовательность  $(s_t \bmod m)$  является чисто периодической. Действительно, во-первых, ее элементы рано или поздно начнут повторяться. Во-вторых, по  $s_{t+1}$  и  $s_{t+2}$  однозначно определяется  $s_t$ , и поэтому последовательность является чисто периодической.

Чистая периодичность означает, что начальная пара вычетов  $(1, 1)$  обязательно повторится:  $(s_{\tau+1}, s_{\tau+2}) \equiv (1, 1) \pmod{m}$  для некоторого  $\tau > 1$ . Но повторенной паре предшествует вычет  $s_\tau \equiv 0 \pmod{m}$ , который приводит к уничтожению вируса.

Минимальное  $\tau$ , для которого выполняется последнее сравнение, называется *рангом* и обозначается через  $\alpha(m)$ . Понятно, что  $\lambda(m) \leq \pi(m)$ , где  $\pi(m)$  — минимальный период последовательности  $(s_t \bmod m)$ , т.е. минимальное  $\tau$ , для которого выполняется предпоследнее сравнение. Величина  $\pi(m)$  называется *периодом Пизано* (Пизано — одно из имен Фибоначчи).

На страничке <http://webpace.ship.edu/msrenault/fibonacci/fib.htm>, подготовленной Марком Рено (Mark Renault), скупкулезно собраны (и частично доказаны) известные факты о числах Фибоначчи  $\bmod m$ . В том числе:

C.8  $\pi(m) = \alpha(m)\omega(m)$ , где  $\omega(m)$  — число нулей на отрезке  $(s_1, \dots, s_{\pi(m)}) \bmod m$ .

B.4  $\pi(2^k) = 3 \cdot 2^{k-1}$ .

E.2  $\omega(2^k) = 2$ ,  $k \geq 3$ .

Эти факты означают, что

$$\alpha(2^k) = 3 \cdot 2^{k-2}, \quad k \geq 3,$$

и, в частности,

$$\alpha(2^{32}) = 3 \cdot 2^{30} = 3221225472.$$

Компьютер будет исцелен на 38-е сутки. □

**Обсуждение.** Вирус на компьютере Боба содержит непреднамеренный (?) механизм самоуничтожения. Интересно, что недавний вирус WannaCry содержал намеренный (?) механизм блокировки размножения: каждая копия WannaCry обращалась к определенному серверу Интернет и, если сервер обнаруживался, размножение прекращалось. Английский программист Marcus Hutchins увидел имя сервера в теле вируса и решил зарегистрировать сервер. Почему бы и нет? Сразу после регистрации WannaCry перестал размножаться.