29 Дискретное логарифмирование

29.1 Метод больших-малых шагов

Пусть $\mathbb{G}$ — циклическая группа, порожденная элементом g, т. е. $\mathbb{G} = \langle g \rangle$. Будем считать, что $\mathbb{G}$ — группа порядка q, т. е. $\operatorname{ord} g = q$.

Нас будут интересовать методы решения уравнения

$$g^x = y, \quad y \in \mathbb{G},$$

относительно $x \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, т. е. методы определения дискретного логарифма (индекса) $\log_g y$.

Пример 29.1. В схеме ЭльГамаля $\mathbb{G}$ — подгруппа $\mathbb{F}_p^*$, $\langle p, g, b \rangle$ — открытый ключ, $\langle a \rangle$ — личный ключ и задача дискретного логарифмирования превращается в задачу определения личного ключа по открытому. □

Пусть $m = \lceil \sqrt{q} \rceil$. *Метод больших-малых шагов* состоит в отыскании совпадения элемента последовательности

$$1, g, g^2, \ldots, g^{m-1},$$

с элементом последовательности

$$y, yg^{-m}, yg^{-2m}, \ldots, yg^{-(m-1)m}.$$

Если найдено совпадение $g^j = yg^{-im}$, то $g^{im+j} = y$ и $\log_g y = (im + j) \bmod q$.

Алгоритм Больших — малых шагов

Вход: (описание $\mathbb{G}, g, y$).

Выход: $\log_g y$.

Шаги алгоритма:

1. $m \leftarrow \lceil \sqrt{q} \rceil$.
2. Построить массив пар (j, g^j), $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Отсортировать пары по второму элементу.
3. Установить $c \leftarrow y$.
4. Для $i = 0, \ldots, m-1$ выполнить
   (1) искать совпадение $c \stackrel{?}{=} g^j$ в массиве;
   (2) если найдено совпадение $c = g^j$, то вернуть $im + j$;
   (3) $c \leftarrow c \cdot g^{-m}$.

Сложность. Требуется выполнить $O(\sqrt{q})$ групповых операций и $O(\sqrt{q} \log q)$ сравнений элементов группы при сортировке на шаге 1 и поиске на шаге 4.1. Если одна групповая операция является более трудоемкой, чем $\log q$ сравнений, то сложность алгоритма — $O(\sqrt{q})$ групповых операций.

29.2 ρ-метод

Мы уже знакомы с ρ-методом факторизации. Рассмотрим теперь ρ-метод логарифмирования, который был предложен Поллардом в 1978 году.

Идея алгоритма. Проведем следующие построения:

1. Разобъем G на подмножества G_1, G_2 и G_3 примерно равной мощности.
2. Построим функцию $\varphi \colon G \to G$,

$$\varphi(z) = \begin{cases} yz, & z \in G_1, \\ z^2, & z \in G_2, \\ gz, & z \in G_3. \end{cases}$$

3. Выберем $z_0 = 1$ (1 — единица G) и построим последовательность $z_t = \varphi(z_{t-1})$, $t = 1, 2, \ldots$.

   Все элементы последовательности имеют вид $z_t = g^{u_t} y^{v_t}$. Если мы нашли совпадение $z_t = z_\tau$, $t < \tau$, то

$$g^{u_t} y^{v_t} = g^{u_\tau} y^{v_\tau} \Rightarrow y^{v_t - v_\tau} = g^{u_\tau - u_t} \Rightarrow (v_t - v_\tau) \log_g y \equiv (u_\tau - u_t) \pmod q.$$

Таким образом, если число $(v_t - v_\tau)$ обратимо по модулю q, то

$$\log_g y = (u_\tau - u_t)(v_t - v_\tau)^{-1} \bmod q.$$

Шаги алгоритма. Для вычисления дискретного логарифма требуется определить элементы последовательности (z_t) и найти коллизию $z_t = z_\tau$ (можно воспользоваться алгоритмом Брента). Кроме этого, требуется знать числа u_t, v_t. Числа можно определять по следующим правилам:

$$(u_t, v_t) = \begin{cases} (u_{t-1}, v_{t-1} + 1) \bmod q, & z_{t-1} \in G_1, \\ (2u_{t-1}, 2v_{t-1}) \bmod q, & z_{t-1} \in G_2, \\ (u_{t-1} + 1, v_{t-1}) \bmod q, & z_{t-1} \in G_3. \end{cases}$$

Сложность алгоритма. Для определения дискретного логарифма требуется вычислить $O(\sqrt{q})$ элементов последовательности (z_t), т. е. выполнить $O(\sqrt{q})$ групповых операций (сложения при определении последовательностей (u_t), (v_t) менее трудоемки, чем групповые операции).

Пример 29.2. На сегодняшний день все серьезные достижения по решению задачи дискретного логарифмирования в группах точек эллиптических кривых (см. следующие лекции) получены с помощью ρ-метода. Компания Certicom в 1997 году объявила конкурсные ECDLP различной степени сложности. На сегодняшний день решено 10 задач из списка Certicom. Рекордное достижение — логарифмирование в группе, порядок которой является числом из 109 двоичных разрядов. В октябре 2009 года был начат эксперимент по дискретному логарифмированию в группе точек эллиптической кривой над полем $\mathbb{F}_{2^{131}}$. Порядок целевой группы является числом из 130 двоичных разрядов. Эксперимент продолжается. С его промежуточными результатами можно ознакомиться в Интернет по адресу `http://ecc-challenge.info`. $\square$

29.3 Метод Поллига — Хеллмана

Пусть $q = q_1 q_2$, $q_i > 1$, $(q_1, q_2) = 1$. Введем в рассмотрение элементы $g_1 = g^{q_2}$, $g_2 = g^{q_1}$ и пусть $\mathbb{G}_1 = \langle g_1 \rangle$, $\mathbb{G}_2 = \langle g_2 \rangle$. Имеем: $\operatorname{ord} g_i = q_i$ и $|\mathbb{G}_i| = q_i$.

Будем искать решение уравнения $g^x = y$ в виде

$$x = x_2 q_1 + x_1, \quad 0 \leqslant x_2 < q_2, \quad 0 \leqslant x_1 < q_1.$$

Если $g^{x_2 q_1 + x_1} = y$, то

$$(g^{x_2 q_1 + x_1})^{q_2} = y^{q_2} \Rightarrow g^{x_1 q_2} = y^{q_2} \Rightarrow g_1^{x_1} = y^{q_2}.$$

Поэтому можно поступить следующим образом:

1. Найти $x_1 = \log_{g_1} y^{q_2}$ в группе $\mathbb{G}_1$.

2. Найти $x_2 = \log_{g_2} y g^{-x_1}$ в группе $\mathbb{G}_2$.

3. Определить $x = x_2 q_1 + x_1$.

Таким образом, для дискретного логарифмирования в $\mathbb{G}$ требуется выполнить логарифмирование в группах $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ меньшего порядка и использовать несложные дополнительные вычисления.

Если порядок $\mathbb{G}_i$ не является простым числом, то мы снова можем заменить логарифмирование в $\mathbb{G}_i$ на логарифмирования в меньших группах и так далее.

При достижении группы порядка p^e, где p — простое число, дискретный логарифм записывается в виде числа в системе счисления по основанию p: $x = (x_{e-1} \ldots x_1 x_0)_p$. Цифры числа определяются последовательно, от x_0 к x_{e-1}. Это можно сделать за время за время $e\sqrt{p}$.

В целом если $|\mathbb{G}| = \prod_{i=1}^{s} q_i^{e_i}$, то для определения $\log_g y$ потребуется выполнить

$$O\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \sqrt{q_i}\right)$$

групповых операций.

Пример 29.3. В первоначальном варианте своей схемы ЭльГамаль предлагал использовать в качестве g примитивный элемент $\mathbb{F}_p^*$, т. е. элемент порядка $p-1$. Если $p-1$ не имеет больших простых делителей, то с помощью метода Поллига — Хеллмана можно достаточно эффективно находить личный ключ $x = \log_g y$. Поэтому требование наличия у $p-1$ большого простого делителя q является весьма важным. Кроме этого, вместо примитивного элемента g можно использовать элемент порядка q, поскольку сложность логарифмирования при таком переходе уменьшается незначительно. □

29.4 λ-метод

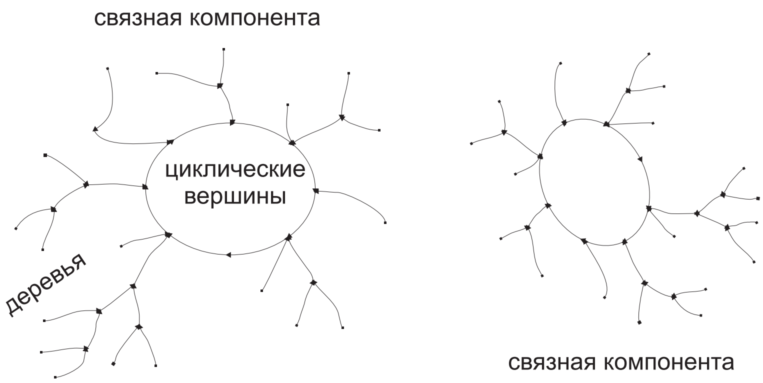
λ-метод также был предложен Поллардом. Альтернативное название метода — метод *кенгуру*.

Идея. Пусть $S \subset \{0, 1, \ldots, q-1\}$ и $h\colon G \to S$ — некоторая хэш-функция. Определим преобразование:

$$\varphi\colon G \to G, \quad z \mapsto zg^{h(z)}.$$

Поставим в соответствие φ *граф*, вершинами которого являются всевозможные элементы G: из каждой вершины $z \in G$ выходит ровно одна дуга, которая заканчивается в $\varphi(z)$.

Известно, что граф любого преобразования представляет собой набор *связных компонент*. В свою очередь, каждая связная компонента представляет собой набор циклических вершин, к которым крепятся *деревья*.



Как и ρ-метод, λ-метод ориентирован на поиск коллизий в графе преобразования φ. В отличие от ρ-метода, поиск коллизий ведется не только в циклических вершинах графа, но и в вершинах деревьев.

Шаги алгоритма.

1. Выбрать $u_0 \in S$, вычислить $z_0 = g^{u_0}$ и построить последовательность
$$z_t = \varphi(z_{t-1}) = z_{t-1}g^{u_t}, \quad u_t = h(z_{t-1}), \quad t = 1, \ldots, T.$$
Запомнить z_T и сумму $(u_0 + \ldots + u_T) \bmod q$.

2. Выбрать $z_0^* = y = g^{v_0}$, где v_0 — неизвестный дискретный логарифм. Построить последовательность
$$z_t^* = \varphi(z_{t-1}^*) = z_{t-1}^* g^{v_t}, \quad v_t = h(z_{t-1}^*), \quad t = 1, 2, \ldots,$$
и после определения очередного z_t^* проверять $z_t^* \stackrel{?}{=} z_T$.

3. Если совпадение найдено, то
$$v_0 + v_1 + \ldots + v_t \equiv u_0 + u_1 + \ldots + u_T \pmod q \Rightarrow v_0 = (u_0 + u_1 + \ldots + u_T - v_1 - \ldots - v_t) \bmod q.$$

Название алгоритма объясняется следующим образом: последовательность z_t объявляется траекторией *прирученного* кенгуру (мы знаем величины прыжков $u_0, u_1, \ldots$), а последовательность z_t^* считается траекторией *дикого* кенгуру (мы не знаем величину первого прыжка v_0).

Сложность. Для определения дискретного логарифма также требуется выполнить $O(\sqrt{q})$ групповых операций.

Распараллеливание. Пусть для поиска дискретного логарифма используется не одно вычислительное устройство (машина Тьюринга) а m устройств. Во сколько раз мы можем уменьшить время поиска?

Оказывается, что для λ-метода время можно уменьшить в m раз, а для ρ-метода — только в $\sqrt{m}$ раз. Суть распараллеливания λ-метода состоит в следующем:

1. Выбрать в G подмножество *различимых* элементов G^* такое, что принадлежность $g \overset{?}{\in} G^*$ можно проверить очень быстро (напр., элементы G кодируются бинарными строками, тогда элементы G^* — это строки, которые начинаются с определенного префикса).

2. На отдельных машинах вести расчет траекторий ручных и диких кенгуру. Вести общий массив различимых элементов, которые достигли кенгуру.

3. Анализировать пересечение траекторий кенгуру в различимых точках и, при возможности, определять дискретный логарифм.