

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ БЛУМФИЛДА С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПАРАМЕТРОВ

В.А. Волошко, Ю.С. Харин

Статья посвящена построению и свойствам прогнозирующей статистики для временного ряда на основе модели EXP. Рассмотрена связь между моделями AR и EXP временного ряда. Построена статистика одношагового прогнозирования временного ряда заданной длины на основе малопараметрической модели EXP. Получены оценки риска построенной прогнозирующей статистики в сравнении с риском AR-прогноза. Доказана Теорема о сравнении скоростей сходимости коэффициентов моделей AR и EXP. Представлены результаты численных экспериментов.

Введение

Точность статистических выводов (оценок, решений, прогнозов) при параметрическом анализе данных, как известно [1,2], зависит от соотношения числа параметров и длительности наблюдения $\gamma(p, T) = p/T$. Если $p \ll T$, то есть $\gamma(p, T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, то статистические выводы на основе классических методов (МНК, максимального правдоподобия, байесовского метода) оказываются состоятельными и дают приемлемую точность для практики. Если же число параметров модели p сравнимо с длительностью T , то есть $\gamma(p, T) \rightarrow c$, $0 < c < 1$, то классические методы не применимы, и приемлемую точность можно достичь лишь для весьма специальных случаев [3]. В связи с этим становится актуальной задача разработки методов статистического анализа данных на основе малопараметрических моделей, т.е. моделей с малым коэффициентом $\gamma(p, T)$.

В данном докладе описываются некоторые свойства прогнозирования стационарного временного ряда на основе экспоненциальной модели Блумфилда [4].

Модели AR и EXP

Пусть $x_t, t \in Z$, - стационарный в широком смысле [2] временной ряд с нулевым средним $E\{x_t\} = 0$, ковариационной и корреляционной функциями $\sigma_\tau = E\{x_t x_{t+\tau}\}$, $\theta_\tau = \sigma_\tau / \sigma_0$, $\tau \in Z$, и спектральной плотностью $S(\lambda) = \sum_{\tau \in Z} \sigma_\tau \times \cos(\tau\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ соответственно. Функцию $L(\lambda) = \ln S(\lambda)$ условимся называть лог-спектральной плотностью.

Будем предполагать, что $L(\cdot) \in L_2[-\pi, \pi]$. Тогда временной ряд x_t допускает единственные представления в виде следующих параметрических моделей бесконечного порядка: экспоненциальной модели Блумфилда $EXP(\infty)$ [4]:

$$S(\lambda) = \exp\{l_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} l_n \cos(n\lambda)\}, l_n \in R, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

и авторегрессионной модели Вольда $AR(\infty)$ [2,5]:

$$S(\lambda) = \sigma^2 \cdot \left| 1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\lambda n} \right|^{-2}, \sigma > 0, b_n \in R, n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где коэффициент l_n ряда Фурье для лог-спектральной плотности в теории цифровой обработки сигналов [6] принято называть n -м кепстральным коэффициентом, $\{b_n\}$ - коэффициенты авторегрессии. Из равенства правых частей (1) и (2) следуют формулы Пурамахди [7], связывающие коэффициенты $\{l_n\}$ и $\{b_n\}$:

$$b_n = l_n - n^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} j l_j b_{n-j}, n = 1, 2, \dots$$

Обозначим $E_{\Pi}\{f\} = \int_{\Pi} f(\omega) d\omega / 2\pi$, где $\Pi = [-\pi, \pi]$ и функция $f: \Pi \rightarrow C$.

Лемма 1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$l(z) = \sum_{n \geq 1} l_n z^n = -z \frac{d}{dz} E_{\Pi} \{ \ln(1 - z e^{i\omega}) L(\omega) \}, \quad (3)$$

$$L(\lambda) = l_0 + 2 \operatorname{Re} \{ l(z) \}, \beta(z) = 1 - \sum_{n \geq 1} b_n z^n = e^{-l(z)}, z = e^{i\lambda}.$$

Операторы приближения спектральной плотности $S(\lambda)$ AR и EXP моделями порядка $p \in N$ будем обозначать соответственно α_p и ε_p : спектральная плотность $\alpha_p(S)(\lambda)$ отвечает процессу $AR(p)$, у которого ковариации до лага p включительно совпадают с $\sigma_0, \dots, \sigma_p$: $E_{\Pi} \{ S(\omega) e^{i\omega} \} = E_{\Pi} \{ \alpha_p(S)(\omega) e^{i\omega} \} |_{n=0}^p$, и $\varepsilon_p(S)(\lambda) = \exp \{ l_0 + 2 \sum_{n=1}^p l_n \cos(n\lambda) \}$. В силу (1), (2) $\alpha_{\infty}(S) = \varepsilon_{\infty}(S) = S$.

Прогнозирование на основе моделей AR и EXP

Линейный одношаговый прогноз x_t по предыдущим значениям $\{x_s\}_{s < t}$ имеет вид:

$$\hat{x}_t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{t-n}, \quad (4)$$

где $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - коэффициенты прогноза.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты прогнозирования (4) порождают авторегрессию $AR(\infty)$ со спектральной плотностью $S_*(\lambda)$, задаваемой (2) при $b_n = a_n, \sigma = \sigma_*$. Тогда для риска $r(S_* | S) = E \{ (\hat{x}_t - x_t)^2 \}$ прогноза (4) верно:*

$$\ln r(S_* | S) - l_0(S) = \ln \{ E_{\Pi} \{ S/S_* \} \} - E_{\Pi} \{ \ln \{ S/S_* \} \}.$$

Теорема 1 характеризует увеличение риска прогнозирования за счет ошибки приближения истинной спектральной плотности $S(\lambda)$ функцией $S_*(\lambda)$. Для малых отклонений $\delta(\lambda) = S(\lambda) - S_*(\lambda)$ справедливо

Следствие 1. *Если $E_{\Pi} \{ (\delta/S)^k \} \rightarrow 0 \quad \forall k \in N$, то*

$$r(S_* | S) \approx e^{l_0(S)} \cdot e^{0.5 D_{\Pi} \{ \delta/S \}} \geq e^{l_0(S)},$$

$$\Delta r = r(S_* | S) - r(S | S) \approx e^{l_0(S)} (e^{0.5 D_{\Pi} \{ \delta/S \}} - 1) \approx e^{l_0(S)} \cdot 0.5 D_{\Pi} \{ \delta/S \},$$

$$\kappa = \Delta r / r(S | S) \approx 0.5 D_{\Pi} \{ \delta / S \} = 0.5 D_{\Pi} \{ S_* / S \},$$

где $D_{\Pi} \{ f \} = E_{\Pi} \{ |f|^2 \} - |E_{\Pi} \{ f \}|^2$ для функций $f: \Pi \rightarrow C$.

Покажем теперь, как строятся прогнозирующие статистики (4) на основе моделей $AR(p)$ и $EXP(p)$ порядка $p \in N$.

$AR(p)$ -прогнозирующая статистика (4) строится по коэффициентам $a = (\varphi_{p,1}, \dots, \varphi_{p,p}, 0, 0, \dots)$. При этом $S_* = \alpha_p(S)$, $\{\varphi_{p,n}\}_{n=1}^p$ зависят только от первых p коэффициентов корреляции $\theta_1, \dots, \theta_p$ и вычисляются рекуррентно по формулам Дурбина-Левинсона [8]:

$$\begin{aligned} \varphi_{p,i} &= (\theta_p - \sum_{i=1}^{p-1} \theta_{p-i} \varphi_{p-1,i}) / (1 - \sum_{i=1}^{p-1} \theta_i \varphi_{p-1,i}), \\ \varphi_{p,i} &= \varphi_{p-1,i} - \varphi_{p,p} \varphi_{p-1,p-i}, \quad 1 \leq i < p. \end{aligned} \quad (5)$$

$EXP(p)$ -прогнозирующая статистика (4) при длительности временного ряда $T \in N$ строится по коэффициентам $a = (\tilde{\varphi}_{T,1}, \dots, \tilde{\varphi}_{T,T}, 0, 0, \dots)$, где для вычисления $\{\tilde{\varphi}_{T,n}\}_{n=1}^T$ в (5) подставляются $EXP(p)$ -приближения коэффициентов корреляции: $\tilde{\theta}_\tau = E_{\Pi} \{ \varepsilon_p(S) e^{i\omega\tau} \} / E_{\Pi} \{ \varepsilon_p(S) \} \approx \theta_\tau |_{\tau=1}^T$, которые находятся численным методом. При этом $S_* = \alpha_T(\varepsilon_p(S))$.

Теорема 2. Среди прогнозов (4) с условием $a_n \equiv 0 |_{n>p}$ $AR(p)$ -прогноз имеет минимальный риск $r_p^* = r(\alpha_p(S) | S)$, причем:

$$r_p^* = \exp \{ l_0(\alpha_p(S)) \} \downarrow_{p \rightarrow \infty} \exp \{ l_0(S) \}. \quad (6)$$

Из Теоремы 2 следует, что $\forall p \in N$ риск $EXP(p)$ -прогноза $r(\alpha_T(\varepsilon_p(S)) | S) = \tilde{r}_p \geq r_p^*$, причем $\tilde{r}_\infty = r_T^*$, где r_T^* определена (6).

Теорема 3. Для $p \in N$ риск $EXP(p)$ -прогноза \tilde{r}_p с ростом длительности наблюдений $T \rightarrow +\infty$ сходится к величине:

$$\tilde{r}_p \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \exp \{ l_0(S) \} \cdot E_{\Pi} \{ \exp \{ 2 \sum_{n>p} l_n \cos(n\lambda) \} \}.$$

Следующий результат показывает, при каких условиях последовательность $EXP(\infty)$ -коэффициентов l_n сходится быстрее, чем последовательность $AR(\infty)$ -коэффициентов b_n .

Теорема 4. Для $l(z)$ из (3) определим $l(e^{i\lambda}) = l_c(\lambda) = l_r(\lambda) + i l_i(\lambda)$, где $l_r(\lambda), l_i(\lambda)$ - соответственно действительная и мнимая части $l_c(\lambda)$. Если $l_c(\lambda)$ дважды дифференцируема, $l_r(\lambda)$ имеет $M < +\infty$ минимумов в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_M$, в которых $l_r(\lambda_k) = l_r^-$, и вторая производная $l_r''(\lambda_k) > 0, k = 1, 2, \dots, M$, то коэффициенты авторегрессии Вольда $b_n(m)$, отвечающие спектральной плотности $(S(\lambda))^m$, при $m \rightarrow +\infty$ имеют вид:

$$b_n(m) = - \frac{e^{-ml_r^-}}{\sqrt{2\pi m}} \left(\sum_{k=1}^M F \left(\frac{ml_i'(\lambda_k) + n}{\sqrt{m}}; R_k, \varphi_k, ml_i(\lambda_k) + n\lambda_k \right) + o(1) \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $l_c''(\lambda_k) = R_k e^{i\varphi_k}$, $R_k > 0$, $|\varphi_k| < \pi/2$, и

$$F(x; R, \varphi, a) = \frac{1}{\sqrt{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2R} \cos \varphi\right\} \cos\left(\frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{x^2}{R} \sin \varphi\right) + a\right).$$

Численные примеры

Для длительности $T = 80$ временного ряда и спектральных плотностей: $S_m(\lambda) = (S(\lambda))^m$, $m = 1, 2, \dots, 6$, были вычислены риски r_p^* и \tilde{r}_K , $p, K = 1, 2, \dots, 80$, $AR(p)$ - и $EXP(K)$ -прогнозов. Спектральная плотность $S(\lambda)$ в эксперименте задавалась $EXP(\infty)$ -моделью с параметрами:

$$l_0 = 0, l_n = -2 \cdot \exp\left\{-\left(\frac{n-4}{1.5}\right)^2\right\} \cdot \sin(0.8(n-4)), n = 1, 2, \dots$$

На Рисунке 1 для каждой спектральной плотности приведены совмещенные графики $\log_2 r_p^*$ и $\log_2 \tilde{r}_K$, а также график величин $\{b_j\}$, $p, K, j = 1, \dots, 80$.

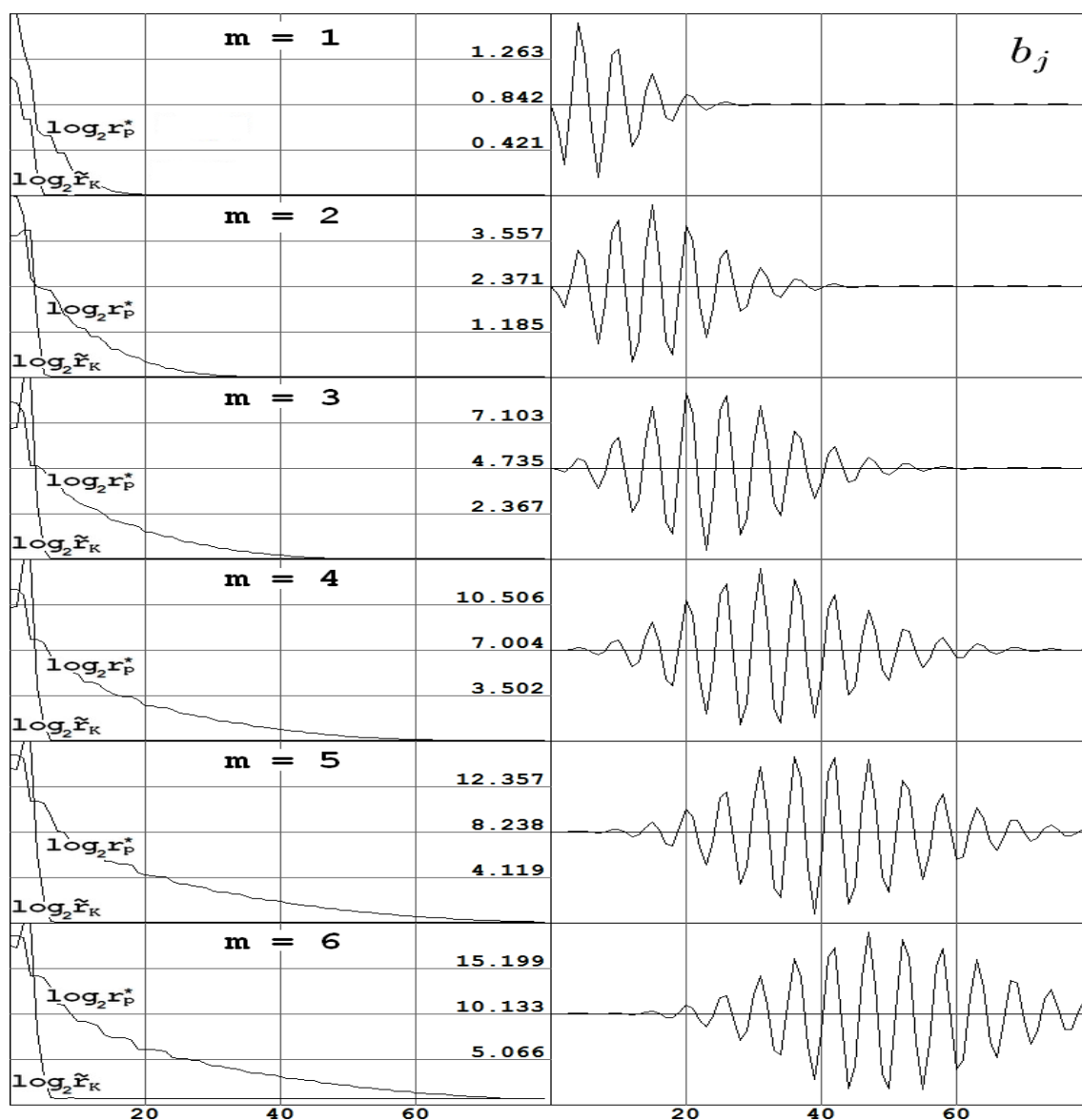


Рис.1. Логарифмы рисков и коэффициенты b_j для $(S(\lambda))^m$

Из Рисунка 1 видно, что при возведении $S(\lambda)$ в возрастающие степени m график зависимости риска $EXP(K)$ -прогноза от числа использованных параметров K сохраняет свой вид, проявляя устойчивость к данному изменению модели. В то же время график зависимости риска $AR(p)$ -прогноза от числа p использованных параметров с ростом m убывает все медленнее. Также по изменению графика коэффициентов $\{b_j\}$ с ростом m видна динамика и характер “удлинения памяти”, возникающего за счет возведения спектральной плотности в степень, т.е. за счет масштабирования коэффициентов $\{l_n\}$, что согласуется с Теоремой 4.

Литература:

1. Ю.С. Харин. Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании / Минск: БГУ, 2008.
2. Т.В. Андерсон. Статистический анализ временных рядов / М., 1976.
3. V.I. Serdobolskiy. Multivariate Statistical Analysis. A High-Dimensional Approach / Dordrecht: Kluwer, 2000.
4. P. Bloomfield. An exponential model for the spectrum of a scalar time series / *Biometrika*, 60:217-226, 1973.
5. А.Н. Ширяев. Вероятность / М.: МЦНМО, 2007.
6. N. Merhav. On the Asymptotic Statistical Behavior of Empirical Cepstral Coefficients / *IEEE Transactions On Signal Processing*, Vol. 41, No. 5, May 1993.
7. M. Pourahmadi. Exact Factorization of the Spectral Density and Its Application to Forecasting and Time Series Analysis / *Communications in Statistics, Part A – Theory and Methods* 12, 2085-2094, 1983.
8. R.A. Maronna. Robust statistics : theory and methods / J.Wiley, 2006.

Валерий Анатольевич Волошко, аспирант кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, valeravoloshko@yandex.ru

Юрий Семенович Харин, член-корреспондент НАН Беларуси, профессор, директор НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, kharin@bsu.by