6 Цифры

Задача. Трент реализовал в шифровальной машине Amgine алгоритм `Digit`, который берет на вход вещественное x и натуральное n, и возвращает n-й после запятой десятичный знак x. В качестве x можно использовать любое аналитически заданное выражение. Например, $\texttt{Digit}(\pi, 1) = 1$, $\texttt{Digit}(\pi, 2) = 4$.

Алиса и Боб получили Amgine и решили воспользоваться ее возможностями следующим образом:

1. Стороны по секретному каналу договариваются об общем ключе k — большом натуральном числе.
2. Алиса выбирает натуральное n и вырабатывает гамму $\texttt{Digit}(a^k, n), \texttt{Digit}(a^k, n+1), \ldots$, где $a = 1 + 2\cos(\pi/9)$.
3. Символы гаммы суммируются с символами открытого текста.[4] Полученный шифртекст отправляется вместе с n.

Виктор обрадован. Почему?

Решение. Задача возникла по мотивам одного из заданий замечательного ресурса Ponder this (см. `http://www.research.ibm.com/ponder/`).

Число $a = 1 + 2\cos(\pi/9) \approx 2.8793$ является корнем многочлена $x^3 - 3x^2 + 1$. Два других корня — это $a_2 \approx -0.5321$ и $a_3 \approx 0.6527$.

Пусть $S_k = a^k + a_2^k + a_3^k$. Используя формулы Ньютона, получаем: $S_1 = 3$, $S_2 = 9$, $S_3 = 24$ и вообще $S_k = 3S_{k-1} - S_{k-3}$ для $k \geq 4$. Это значит, что числа S_k — целые.

Поскольку $|a_2| < 1$ и $|a_3| < 1$,

$$S_k - a^k = a_2^k + a_3^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

причем $S_k - a^k > 0$. Следовательно, с ростом k в десятичной записи a^k после запятой встречаются только девятки. Гамма будет фиксированной и Виктор может определить открытый текст!

[4] Открытый текст является словом из десятичных знаков.