55 Открыть все

Задача. Бобу нужно как можно быстрее открыть n замков, используя $2n$ ключей. Каждый ключ открывает ровно один замок, и каждый замок открывается ровно двумя ключами. Боб решил открывать замки поочередно, перебирая оставшиеся ключи. Как только ключ подошел, Боб откладывает его и переходит к следующему замку. Алиса критикует Боба. Она предлагает переходить к следующему замку только после того, как найден второй ключ от текущего замка. Алиса утверждает, что при применении ее стратегии среднее число попыток (проверок ключа в замке) будет меньше. Кто прав — Алиса или Боб?

Дополнительный вопрос (*): существуют ли стратегии с еще меньшим средним числом попыток?

Решение. Обобщим задачу. Пусть имеется n замков, N ключей и к каждому замку подходят ровно M ключей ($N \geq nM$). Наше обобщение включает случай $M = 1$, рассмотренный в заметке [Marchal O. Locks and keys: How fast can you open several locks with too many keys? Avail. at: `https://arxiv.org/abs/1509.00844`, 2015], откуда была взята идея задачи.

Пусть замки нумеруются от 0 до $n-1$. Открывая i-й замок, Боб находит первый подходящий ключ, Алиса — все M ключей. В общем случае требуется найти $m \in \{1, \ldots, M\}$ ключей. Количество неудачных попыток описывается отрицательным гипергеометрическим распределением. Среднее число попыток:

$$m\frac{N-M-mi}{M+1} + m.$$

Чтобы открыть все замки, Бобу в среднем потребуется

$$B_M(n,N) = n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{N-M-i}{M+1} = n + \frac{n}{M+1}\left(N - M - \frac{n-1}{2}\right)$$

попыток. Среднее число попыток Алисы:

$$A_M(n,N) = (n-1)M+1+M\sum_{i=0}^{n-1}\frac{N-M-Mi}{M+1} = (n-1)M+1+\frac{Mn}{M+1}\left(N-M-\frac{M(n-1)}{2}\right).$$

Здесь мы учли тот факт, что при открытии последнего замка Алисе достаточно найти только один ключ от него.

При $M, n \geq 2$ стратегия Боба («сокращай число замков») лучше стратегии Алисы («сокращай число ключей»):

$$A_M(n, nM+c) - B_M(n, nM+c) = \frac{M-1}{2(M+1)}\Big(M(n^2+n-2) + n(-n+2c+3) - 2\Big) \geq$$
$$\geq \frac{M-1}{2(M+1)}(n^2+5n-6) > 0.$$

Более того, стратегия Боба является оптимальной:

$$B_M(n,N) = R_M(n,N),$$

где $R_M(n,N)$ — минимальное среднее число попыток.

Действительно, рассмотрим оптимальный алгоритм открытия. Разобьем его на две части: до открытия первого замка и после открытия. Среднее время первой части не может быть меньше

$$\frac{N-M}{M+1} + 1 = \frac{N+1}{M+1}.$$

Факт открытия какого-то замка каким-то ключом – это просто сокращение числа ключей и замков на единицу. Другой информации факт не дает. Поэтому

$$R_M(n,N) \geq \frac{N+1}{M+1} + R_M(n-1,N-1).$$

Оптимальность стратегии Боба следует из того, что

$$B_M(n,N) = \frac{N+1}{M+1} + B_M(n-1,N-1)$$

и

$$B_M(1,N) = R_M(1,N) = \frac{N+1}{M+1}.$$