

УДК 517.958:537.8

В. Т. ЕРОФЕЕНКО, Ю. В. ПУЛКО

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ЭКРАНАХ
 С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ТОКАМИ И ЗАРЯДАМИ ДВОЙНОГО СЛОЯ**

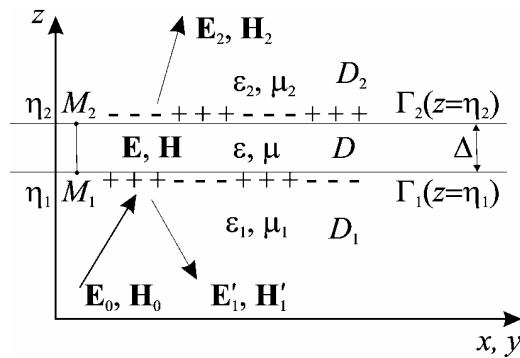
Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 28.12.2007)

В технических устройствах радиотехники и электроники используются технические элементы, представляющие собой соединения двух однородных материалов, состыкованных вдоль плоской поверхности, исследованию которых уделяется большое внимание [1–3]. Между материалами образуются контактные структуры, в которых наблюдаются различного рода электрические эффекты. При математическом моделировании контактных структур необходимо учитывать достаточно тонкий материальный слой D , являющийся переходной областью между материалами. Как известно, между двумя материалами образуется контактная разность потенциалов, даже если отсутствует внешнее электрическое поле. Ситуация усложняется, если на систему воздействует внешнее высокочастотное электромагнитное поле. Это означает, что по разные стороны переходного слоя D располагаются электрические заряды двойного слоя: слой положительных и слой отрицательных зарядов, которые не нейтрализуются, а создают разность потенциалов.

Переходный слой неоднороден по своей материальной структуре, но для упрощения математической модели будем рассматривать однородный переходный слой D с усредненными электромагнитными характеристиками. В работах [4, 5] приведены граничные условия нестационарной электродинамики для слоя D при наличии токов, равномерно распределенных по слою. В данной работе ставится задача о моделировании граничных условий монохроматической электродинамики для слоя, когда наведенные токи и заряды концентрируются на его плоскостях, что позволяет моделировать прохождение плоских волн через сложную контактную границу двух материалов.

1. Токи и заряды двойного слоя. В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим плоский слой $D(\eta_1 < z < \eta_2, -\infty < x, y < \infty)$, ограниченный плоскостями $\Gamma_j(z = \eta_j)$ и заполненный средой, характеризующейся комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ (см. рисунок). Слой D моделирует переходную зону между двумя материальными полупространствами $D_1(z < \eta_1)$, $D_2(z > \eta_2)$ с характеристиками ϵ_j, μ_j . На слой D из области D_1 воз-



Переходная зона между двумя материальными полупространствами

действует первичное плоское монохроматическое поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ и зависимостью от координат x, y вида

$$\Phi = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y), \quad (1)$$

где α_1, α_2 – заданные (в общем случае комплексные) параметры, ω – круговая частота поля. Пусть $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$ – отраженное поле в области D_1 ; $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ – поле, проникшее в область D_2 ; \mathbf{E}, \mathbf{H} – поле в слое D . Обозначим: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_1, \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_1$ – суммарное поле в области D_1 . Первичное поле индуцирует

на плоскостях Γ_j заряды с комплексными поверхностными плотностями σ_j и электрические токи с комплексными поверхностными плотностями \mathbf{j}_j , сосредоточенные по обе стороны слоя D . В результате перемещения зарядов образуются токи и заряды двойного слоя:

$$\mathbf{j}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}_1 = -\mathbf{j}, \quad \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_1 = -\sigma, \quad (2)$$

где $\mathbf{j} = j_x \mathbf{e}_x + j_y \mathbf{e}_y$; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты декартовой системы координат.

Так как электромагнитные поля имеют структуру (1), то наведенные токи и заряды (2) также имеют аналогичную зависимость от координат x, y :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \Phi, \quad \sigma = \sigma_0 \Phi, \quad (3)$$

где σ_0 – комплексная постоянная, \mathbf{j}_0 – комплексный постоянный вектор.

Векторное поле \mathbf{j} разделим на потенциальную и соленоидальную части, представив в виде суммы $\mathbf{j} = \text{grad} \psi + \text{rot} \Psi$, где $\psi = j_p \Phi$, $\Psi = j_s \Phi \mathbf{e}_z$; j_p, j_s – комплекснозначные постоянные.

В результате

$$\mathbf{j} = i(j_s \mathbf{e}_1 + j_p \mathbf{e}_2) \Phi, \quad [\mathbf{j}, \mathbf{n}] = i(j_p \mathbf{e}_1 - j_s \mathbf{e}_2) \Phi, \quad (4)$$

где $\mathbf{e}_1 = \alpha_2 \mathbf{e}_x - \alpha_1 \mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_2 = \alpha_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_y$; $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ – единичная нормаль к слою D . Введем нормированные векторы $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 / \lambda$, $\mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_2 / \lambda$, $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $0 \leq \arg \lambda < \pi$, тогда $\mathbf{j} = (I_s \mathbf{e}_1^* + I_p \mathbf{e}_2^*) \Phi$, $I_s = i \lambda j_s$, $I_p = i \lambda j_p$ – комплексные амплитуды поверхностных плотностей вихревых и потенциальных токов.

2. Краевая задача для слоя с классическими граничными условиями. Электромагнитные поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ удовлетворяют уравнениям Максвелла для комплексных амплитуд поля:

$$\text{rot} \mathbf{E} = i \omega \mu \mathbf{H}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = -i \omega \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{в } D; \quad (5)$$

$$\text{rot} \mathbf{E}_j = i \omega \mu_j \mathbf{H}_j, \quad \text{rot} \mathbf{H}_j = -i \omega \varepsilon_j \mathbf{E}_j \quad \text{в } D_j. \quad (6)$$

Будем считать, что на граничных плоскостях Γ_j выполнены классические граничные условия с учетом поверхностных токов и зарядов.

На плоскости Γ_1

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E} - \mathbf{E}_1]_{z=\eta_1} = 0, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{H} - \mathbf{H}_1]_{z=\eta_1} = \mathbf{j}_1; \quad (7)$$

$$(\mu \mathbf{H} - \mu_1 \mathbf{H}_1, \mathbf{n})_{z=\eta_1} = 0, \quad (\varepsilon \mathbf{E} - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{n})_{z=\eta_1} = \sigma_1. \quad (8)$$

На плоскости Γ_2

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}]_{z=\eta_2} = 0, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}]_{z=\eta_2} = \mathbf{j}_2; \quad (9)$$

$$(\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu \mathbf{H}, \mathbf{n})_{z=\eta_2} = 0, \quad (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{n})_{z=\eta_2} = \sigma_2. \quad (10)$$

Выполнены также законы сохранения поверхностных зарядов на плоскостях Γ_j :

$$\text{div} \mathbf{j}_j = i \omega \sigma_j. \quad (11)$$

В силу (2) условия (11) выполнены, если

$$\text{div} \mathbf{j} = i \omega \sigma. \quad (12)$$

Подставляя выражения (3), (4) в (12), получим соотношение $j_p = \frac{\omega}{i\lambda^2} \sigma_0 \left(I_p = \frac{\omega}{\lambda} \sigma_0 \right)$. Заметим, что, если выполнены условия (11), тогда граничные условия (8), (10) следуют из граничных условий (7), (9). Таким образом, условия (7), (9) являются основными граничными условиями на поверхностях Γ_j .

Сформулируем задачу рассеяния плоского поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ на слое D .

Краевая задача 1. Требуется определить (при заданных полях $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$) плоские электромагнитные поля $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbb{C}^1(D)$; $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1 \in \mathbb{C}^1(D_1)$; $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}^1(D_2)$, которые удовлетворяют уравнениям (5), (6), граничным условиям (7), (9) и условиям на бесконечности при $z \rightarrow \pm\infty$ в областях D_j . Условия на бесконечности означают, что поле $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ распространяется в положительном направлении оси Oz , а поле $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$ – в отрицательном.

3. Аналитическое представление полей. Представим искомые электромагнитные поля в областях D, D_j в виде комбинации базисных плоских TE - и TH -поляризованных полей [6, 8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= a_1 \mathbf{W}^{(+1)} + a_2 \mathbf{W}^{(-1)} + a_3 \mathbf{W}^{(+2)} + a_4 \mathbf{W}^{(-2)}, \\ \mathbf{H} &= h \left(a_1 \mathbf{W}^{(+2)} + a_2 \mathbf{W}^{(-2)} + a_3 \mathbf{W}^{(+1)} + a_4 \mathbf{W}^{(-1)} \right); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{E}'_1 = x_1 \mathbf{W}_1^{(+1)} + y_1 \mathbf{W}_1^{(+2)}, \quad \mathbf{H}'_1 = h_1 \left(x_1 \mathbf{W}_1^{(+2)} + y_1 \mathbf{W}_1^{(+1)} \right); \quad (14)$$

$$\mathbf{E}_2 = x_2 \mathbf{W}_2^{(-1)} + y_2 \mathbf{W}_2^{(-2)}, \quad \mathbf{H}_2 = h_2 \left(x_2 \mathbf{W}_2^{(-2)} + y_2 \mathbf{W}_2^{(-1)} \right), \quad (15)$$

где $h = \frac{\kappa}{i\omega\mu}$, $h_j = \frac{\kappa_j}{i\omega\mu_j}$, $\kappa = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\kappa_j = \omega\sqrt{\varepsilon_j\mu_j}$, $0 \leq \arg \kappa, \kappa_j < \pi$, $\mathbf{W}^{(\mp 1)} = \frac{i}{\lambda} \mathbf{e}_1 X(\mp)$,

$\mathbf{W}^{(\mp 2)} = \frac{1}{\kappa} \left(\mp \frac{iv}{\lambda} \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_z \right) X(\mp)$, $X(\mp) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v z)$, $v = \sqrt{\lambda^2 - \kappa^2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg v < \frac{\pi}{2}$,

$\mathbf{W}_j^{(\mp 1)} = \frac{i}{\lambda} \mathbf{e}_1 \Phi \exp(\mp v_j z)$, $\mathbf{W}_j^{(\mp 2)} = \frac{1}{\kappa_j} \left(\mp \frac{iv_j}{\lambda} \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_z \right) \Phi \exp(\mp v_j z)$, $v_j = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_j^2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}$;

x_j, y_j – амплитуды искомого поля.

Первичное электромагнитное поле представим в виде

$$\mathbf{E}_0 = x_0 \mathbf{W}_1^{(-1)} + y_0 \mathbf{W}_1^{(-2)}, \quad \mathbf{H}_0 = h_1 \left(x_0 \mathbf{W}_1^{(-2)} + y_0 \mathbf{W}_1^{(-1)} \right), \quad (16)$$

где x_0, y_0 – заданные постоянные амплитуды поля.

Выразим коэффициенты a_s поля (13) через предельные значения поля на плоскостях Γ_j . Для этого рассмотрим компоненты

$$\mathbf{E}_\tau = [\mathbf{n}, [\mathbf{E}, \mathbf{n}]] = \frac{i}{\lambda} \mathbf{e}_1 (a_1 X(+) + a_2 X(-)) + \frac{iv}{\kappa\lambda} \mathbf{e}_2 (a_3 X(+) - a_4 X(-)), \quad (17)$$

$$E_z = \frac{\lambda}{\kappa} (a_3 X(+) + a_4 X(-)), \quad H_z = \frac{h\lambda}{\kappa} (a_1 X(+) + a_2 X(-)) \quad (18)$$

и вычислим скалярные произведения полей (17) с векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , тогда

$$a_1 X(+) + a_2 X(-) = \frac{1}{i\lambda} (\mathbf{E}_\tau, \mathbf{e}_1), \quad a_3 X(+) - a_4 X(-) = \frac{\kappa}{i\lambda v} (\mathbf{E}_\tau, \mathbf{e}_2). \quad (19)$$

Рассматривая соотношения (19) на плоскостях $z = \eta_1$, $z = \eta_2$, получим две системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_1 X_1(+)+a_2 X_1(-) &= \frac{1}{i\lambda} \left(\mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_1 \right), \\ a_1 X_2(+)+a_2 X_2(-) &= \frac{1}{i\lambda} \left(\mathbf{E}_\tau^{(2)}, \mathbf{e}_1 \right); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_3 X_1(+)-a_4 X_1(-) &= \frac{\kappa}{i\lambda\nu} \left(\mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_2 \right), \\ a_3 X_2(+)-a_4 X_2(-) &= \frac{\kappa}{i\lambda\nu} \left(\mathbf{E}_\tau^{(2)}, \mathbf{e}_2 \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где $X_j(\mp) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp \nu\eta_j)$, $\mathbf{E}_\tau^{(j)} = \mathbf{E}_\tau|_{z=\eta_j}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$, $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_x + a_2 \mathbf{e}_y$.

Разрешим системы (20), (21), тогда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{i\lambda d} \left(e^{-\nu\eta_1} \mathbf{E}_\tau^{(2)} - e^{-\nu\eta_2} \mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_1 \right), \\ a_2 &= -\frac{1}{i\lambda d} \left(e^{\nu\eta_1} \mathbf{E}_\tau^{(2)} - e^{\nu\eta_2} \mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_1 \right), \\ a_3 &= \frac{\kappa}{i\lambda\nu d} \left(e^{-\nu\eta_1} \mathbf{E}_\tau^{(2)} - e^{-\nu\eta_2} \mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_2 \right), \\ a_4 &= \frac{\kappa}{i\lambda\nu d} \left(e^{\nu\eta_1} \mathbf{E}_\tau^{(2)} - e^{\nu\eta_2} \mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_2 \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $d = 2\Phi \operatorname{sh}(\nu\Delta)$, $\Delta = \eta_2 - \eta_1$ – толщина слоя.

Таким образом, коэффициенты a_s , а значит и поля (13) представлены через предельные значения $\mathbf{E}_\tau^{(j)}$ на плоскостях Γ_j .

4. Двухсторонние граничные условия для слоя с заданными поверхностными токами. Как известно, в случае плоских монохроматических полей вида (13) имеют место граничные условия, связывающие предельные электромагнитные поля $\mathbf{E}|_{z=\eta_j} = \mathbf{E}^{(j)}$, $\mathbf{H}|_{z=\eta_j} = \mathbf{H}^{(j)}$ по обе стороны слоя D [7, 8, с. 92];

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}^{(2)}(M_2) - \mathbf{E}^{(1)}(M_1)] &= \mathcal{E}(\mathbf{H}_\tau^{(2)}(M_2) + \mathbf{H}_\tau^{(1)}(M_1)), \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}^{(2)}(M_2) - \mathbf{H}^{(1)}(M_1)] &= \mathcal{G}(\mathbf{E}_\tau^{(2)}(M_2) + \mathbf{E}_\tau^{(1)}(M_1)), \quad M_j(x, y, \eta_j) \in \Gamma_j, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathcal{E} = p_1 \mathcal{E}$, $\mathcal{G} = -p_2 \mathcal{E}$, $p_1 = \frac{i\omega\mu}{\nu\kappa^2} \operatorname{th}\left(\frac{\nu\Delta}{2}\right)$, $p_2 = \frac{i\omega\varepsilon}{\nu\kappa^2} \operatorname{th}\left(\frac{\nu\Delta}{2}\right)$, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \kappa^2 - \alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \kappa^2 - \alpha_1^2 \end{pmatrix}$.

В формулах (23) перейдем к внешним полям \mathbf{E}_j , \mathbf{H}_j по отношению к слою D . В результате получим следующие граничные условия.

У т в е р ж д е н и е 1. Для плоских монохроматических электромагнитных полей с зависимостью от координат x , y вида (1) выполнены двухсторонние граничные условия, связывающие поля по обе стороны слоя D с заданными поверхностными токами двойного слоя на поверхностях Γ_j :

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2(M_2) - \mathbf{E}_1(M_1)] &= \mathcal{E}(\mathbf{H}_{2\tau}(M_2) + \mathbf{H}_{1\tau}(M_1)) + \mathbf{I}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2(M_2) - \mathbf{H}_1(M_1)] &= \mathcal{G}(\mathbf{E}_{2\tau}(M_2) + \mathbf{E}_{1\tau}(M_1)), \quad M_j(x, y, \eta_j) \in \Gamma_j, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\mathbf{I} = -2\mathcal{E}[\mathbf{j}, \mathbf{n}] = \frac{qi}{\lambda} (v^2 I_p \mathbf{e}_1 + \kappa^2 I_s \mathbf{e}_2) \Phi, \quad (25)$$

$q = \frac{2}{\omega \epsilon v} \operatorname{th} \left(\frac{v\Delta}{2} \right)$; I_p , I_s – заданные комплексные числа, определяющие поверхностные токи;

\mathbf{n} – единичная нормаль к слою D , направленная в область D_2 .

Действительно, воспользуемся условиями (7), (9), (2) в формулах (23) и перейдем к внешним полям \mathbf{E}_j , \mathbf{H}_j . В результате получим граничные условия (24). Учитывая представление поверхностных токов на плоскостях Γ_j в виде соотношения (2), (4), вычислим векторное поле \mathbf{I} , которое представляется выражением (25).

Заметим, что поверхностные токи и их структура в граничных условиях (24) считаются заданными и поддерживаются внешними силами. Возможна ситуация, когда поверхностные токи определяются не сторонними силами, а величиной электромагнитного поля, воздействующего на слой D , т. е. индуцируются первичным полем и структурой переходного слоя D и его контактами с внешней средой.

5. Двухсторонние граничные условия для слоя с индуцированными поверхностными токами. Определим емкости потенциальных и вихревых поверхностных токов на слое $D(\eta_1 < z < \eta_2)$ в случае высокочастотных электромагнитных полей, используя формулы

$$C_p \frac{\omega}{\lambda} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dz = I_p \Phi, \quad (26)$$

$$C_s \frac{1}{\lambda} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mathbf{H}, \mathbf{n}) dz = I_s \Phi, \quad (27)$$

где C_p – комплексная емкость потенциальных поверхностных токов для слоя D , C_s – комплексная емкость вихревых поверхностных токов для слоя D . Производя в равенстве (26) замену $I_p = \frac{\omega}{\lambda} \sigma_0$, получим в соответствии с (3) известную формулу для поверхностной конденсаторной емкости $C = C_p$ для слоя D : $C \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dz = \sigma$. Таким образом, формулы (26), (27) обобщают

понятие конденсаторной емкости на случай плоских высокочастотных полей. В общем случае величины C_p , C_s зависят от параметров плоского поля α_1 , α_2 , ω . В дальнейшем же будем считать, что величины C_p , C_s постоянные и не зависят от этих параметров.

У т в е р ж д е н и е 2. В случае плоского электромагнитного поля вида (13) имеют место формулы

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dz = -\frac{i}{v^2} (\mathbf{E}_\tau^{(2)} - \mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_2), \quad (28)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mathbf{H}, \mathbf{n}) dz = -\frac{1}{\omega \mu v} \operatorname{th} \left(\frac{v\Delta}{2} \right) (\mathbf{E}_\tau^{(2)} + \mathbf{E}_\tau^{(1)}, \mathbf{e}_1).$$

Действительно, учитывая (18), получим $\int_{\eta_1}^{\eta_2} E_z dz = \frac{\lambda \Phi}{\kappa v} \left(a_3 (e^{v\eta_2} - e^{v\eta_1}) - a_4 (e^{-v\eta_2} - e^{-v\eta_1}) \right)$,

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} H_z dz = \frac{\lambda h \Phi}{\kappa v} \left(a_1 (e^{v\eta_2} - e^{v\eta_1}) - a_2 (e^{-v\eta_2} - e^{-v\eta_1}) \right).$$

Подставляя в эти выражения коэффициенты (22), получим требуемые соотношения (28).

В формулах (28) перейдем к внешним полям \mathbf{E}_j на основании граничных условий (7), (9). Полученные выражения для интегралов (28) подставим в формулы (26), (27) и определим амплитуды поверхностных токов, наведенных высокочастотным полем:

$$\begin{aligned} I_p \Phi &= -\frac{i\omega C_p}{\lambda v^2} (\mathbf{E}_{2\tau} - \mathbf{E}_{1\tau}, \mathbf{e}_2), \\ I_s \Phi &= -\frac{C_s}{\omega \mu \lambda v} \operatorname{th} \left(\frac{v\Delta}{2} \right) (\mathbf{E}_{2\tau} + \mathbf{E}_{1\tau}, \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (29)$$

Исключим токи I_p , I_s в формулах (24), (25) с помощью соотношений (29). В результате граничные условия (24) преобразуются к следующему виду.

У т е р ж д е н и е 3. Для плоских монохроматических полей с зависимостью от координат x , y вида (1) выполнены двухсторонние граничные условия, связывающие поля по обе стороны слоя D с индуцированными первичным полем (16) поверхностными токами двойного слоя (29) с заданными комплексными емкостями C_p , C_s :

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2(M_2) - \mathbf{E}_1(M_1)] &= \mathcal{E}(\mathbf{H}_{2\tau}(M_2) + \mathbf{H}_{1\tau}(M_1)) + \\ f(\mathbf{E}_2(M_2) - \mathbf{E}_1(M_1), \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1 &+ g(\mathbf{E}_2(M_2) + \mathbf{E}_1(M_1), \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2(M_2) - \mathbf{H}_1(M_1)] &= \mathcal{G}(\mathbf{E}_{2\tau}(M_2) + \mathbf{E}_{1\tau}(M_1)), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{где } f = \frac{2C_p}{\varepsilon v \lambda^2} \operatorname{th} \left(\frac{v\Delta}{2} \right), \quad g = \frac{2C_s}{i v^2 \lambda^2} \operatorname{th}^2 \left(\frac{v\Delta}{2} \right).$$

Объединим граничные условия (24), (30) и построим модель обобщенных граничных условий на плоском экране с заданными и наведенными поверхностными токами двойного слоя.

М о д е л ь. При наличии на слое D индуцированных первичным полем (16) и заданных внешних поверхностных токов для монохроматических полей вида (14), (15) выполнены граничные условия

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] &= \mathcal{E}(\mathbf{H}_{2\tau} + \mathbf{H}_{1\tau}) + f(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1 + g(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 + \mathbf{I}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] &= \mathcal{G}(\mathbf{E}_{2\tau} + \mathbf{E}_{1\tau}), \end{aligned} \quad (31)$$

где \mathbf{I} определяется формулой (25); I_p , I_s , C_p , C_s – заданные комплексные постоянные.

При достаточно малой толщине слой D заменяется срединной поверхностью слоя Γ . При этом граничные условия (31) переносятся на срединную поверхность Γ , которая моделирует контактную поверхность двух сред.

Используя граничные условия (31), сформулируем задачу рассеяния плоского поля (16) на слое D .

К р а е в а я з а д а ч а 2. Требуется определить (при заданных полях \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0) плоские поля $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1 \in \mathbb{C}^1(D_1)$, $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}^1(D_2)$, которые удовлетворяют уравнениям (6), граничным условиям (31) и условиям на бесконечности при $z \rightarrow \pm\infty$ в областях D_j .

При решении задачи используются представления плоских полей в виде (14), (15).

Литература

1. Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 9. С. 1048–1053.
2. Федянович В. И. // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 4. С. 694–702.
3. Переяславец М. Л. // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 9. С. 1559–1564.
4. Ерофеев В. Т., Лобанов А. В. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 5. С. 567–571.

5. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 12. С. 67–72.
6. Ерофеев В. Т., Кравченко В. Ф., Крючков А. Н. // Радиотехника. 1995. № 6. С. 49–57.
7. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб., 1998.
8. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. // Математические модели в электродинамике. Ч. 2. Минск, 2008.

V. T. EROFEENKO, J. V. PULKO

**MODELING OF BOUNDARY CONDITIONS
ON SCREENS WITH DOUBLE LAYER SURFACE CURRENTS AND CHARGES**

Summary

Boundary conditions for an isotropic intermediate layer influenced by an arbitrary combination of *TE*- and *TN*-polarized electromagnetic fields were obtained. Induced with initial field surface currents and charges, which are concentrated on the layer planes, were taken into account.